

Математическая модель экстраполятора на основе стохастического уравнения, связывающего процессы с рациональным и квазирациональным спектром

Л.Ю. Фадеева

Аннотация — В работе установлено стохастическое дифференциально – разностное уравнение, связывающее случайный процесс с рациональной спектральной плотностью с процессом с квазирациональной спектральной плотностью. Приведенное в работе решение этого уравнения позволило осмыслить механизм образования и структуру спектральной характеристики и оптимального экстраполятора процесса с квазирациональной спектральной плотностью на основе известных формул процессов с рациональным спектром. Показано, что процесс с квазирациональным спектром является L – марковским процессом. Установлено, что прогноз L – марковского процесса зависит от значений процесса в нескольких точках – так называемой L – границы. Указан метод определения численных значений полученного оптимального оператора экстраполяции путем аппроксимации исследуемого L – марковского процесса тригонометрическим полиномом с оптимальным числом гармоник. Применение разработанных моделей и алгоритмов для процессов с квазирациональным спектром возможны в различных радиотехнических приложениях.

Ключевые слова — математическое моделирование, экстраполятор, квазирациональная спектральная плотность, случайный процесс, L – марковский процесс, стохастическое дифференциально – разностное уравнение.

I. ВВЕДЕНИЕ

Радиотехнические задачи анализа и синтеза радиосистем; моделирования и технической реализации устройств, описывающих и выполняющих преобразования случайных процессов, давно и достаточно успешно решаются учеными, однако, построение алгоритмов и синтезирование оптимальных многофункциональных устройств на их основе до сих пор является актуальной задачей.

Классический подход в теории оптимальной фильтрации, экстраполяции и интерполяции случайных сигналов, как правило, использует рациональные спектральные плотности. Сейчас это легко реализуется аппаратно, такие задачи аналитически решаемы,

алгоритмы широко известны [1].

Однако, описание реальных радиофизических систем подчиняется дробным законам, это например, фликкер-шум [2], разработка современных функциональных материалов [3,4], случайные процессы в неоднородных средах, шероховатые поверхности [5]. Для подобных процессов спектральная плотность определяется как $S(\omega) \sim \omega^{-\alpha}$, где α может быть и дробным числом [6].

Такие физические эффекты рациональная модель принципиально не может описать. Рассмотрение квазирациональных моделей позволяет более адекватно моделировать реальные физические процессы. Квазирациональная спектральная характеристика – это функция, которая не является строго рациональной, а может быть представлена произведением рациональной части и экспоненциальной функции. Тогда в формуле спектральной плотности α будет иметь смысл масштабного коэффициента, либо включенной неоднородности. Примерами широко известных физических процессов с квазирациональными спектральными плотностями является скин – эффект, где глубина скин – слоя определяется как

$\delta(\omega) = \sqrt{2/\mu\sigma\omega}$, а сопротивление $R(\omega) \propto \sqrt{\omega}$;

диэлектрические и магнитные потери в тонких пленках с комплексной диэлектрической проницаемостью ϵ , где спектральная плотность флуктуаций поля будет

определяться как $S(\omega) \propto \omega^\alpha / \left| \omega_0 + (j\omega)^\alpha \right|^2$;

определение фрактальных размерностей шероховатых поверхностей спектральным методом [7,8].

В реальных экспериментах, используя современную аппаратуру, например, векторные анализаторы цепей или анализаторы спектра, мы можем измерять импеданс, диэлектрическую проницаемость или коэффициент отражения, которые так же являются комплексными частотно зависимыми величинами.

Поэтому целесообразно и обоснованно использование аналитических или алгоритмических моделей с квазирациональными спектральными характеристиками как обобщение и расширение моделей с рациональным спектром при разработке различных автоматизированных систем контроля и измерения параметров реальных физических процессов.

Статья получена 3 марта 2026.

Л.Ю. Фадеева, к.т.н., доцент Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ (e-mail: milafadeeva@yandex.ru).

Целью настоящей работы является установление связи между случайными процессами с квазирациональными спектральными плотностями и процессами с рациональным спектром в виде стохастического дифференциально – разностного уравнения для построения оптимальных моделей и алгоритмов на их основе и адекватного описания сложных физических процессов.

Это уравнение интересно в том отношении, что оно устанавливает новые неожиданные связи между различными вроде бы далекими друг от друга разделами математики, – теорией случайных процессов и дифференциально– разностными уравнениями.

Решение этого уравнения позволяет осмыслить структуру и механизм образования спектральной характеристики экстраполирования и оптимального экстраполятора процесса с квазирациональной спектральной плотностью на основе известных формул Н. Винера [9] для процессов с рациональным спектром.

Выявленная структура спектральной характеристики и оператора экстраполирования далее конкретизировались в соответствии с методом А. Яглома [10], доставляющим достаточные условия того, что некоторая функция комплексного переменного является спектральной характеристикой экстраполирования.

Постановка задач экстраполирования и интерполирования принадлежит знаменитому русскому математику, академику А.Н. Колмогорову [11], занимавшемуся этими задачами в 40-х годах прошлого века.

Известный американский математик Дж. Дууб [12], разработчик аксиоматики теории стохастических процессов, а также теории мартингалов и установивший связь между теорией потенциала и марковскими процессами, выделил класс случайных процессов с рациональным спектром, как класс, для которого возможно эффективное построение явных экстраполяционных формул.

Основоположник искусственного интеллекта, отец кибернетики, знаменитый американский математик Н. Винер получил эти формулы для стохастических процессов с рациональной спектральной плотностью вида:

$$f_0(\omega) = |K(\omega)|^2 / |M(\omega)|^2 \quad (1)$$

где $K(\omega)$ и $M(\omega)$ – многочлены, однако строгого математического доказательства полученных формул он не предоставил.

Один из учеников – последователей А.Н. Колмогорова, известный математик А. Яглом получил строгое математическое доказательство экстраполяционных формул Н. Винера, предложив оригинальный метод, суть которого заключается в установлении достаточных условий того, чтобы функция комплексного переменного $\Phi_t(\omega)$ была спектральной характеристикой экстраполирования [10]. Эти условия подробно изложены в работе автора [13,14], ключевыми из них являются: а) аналитичность функции $\Phi_t(\omega)$ в нижней полуплоскости и б) аналитичность функции

$\Psi_t(\omega) = [e^{i\omega t} - \Phi_t(\omega)] \cdot (1/f(\omega))$ в верхней полуплоскости, где $f(\omega)$ – спектральная плотность исследуемого случайного процесса.

II. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Установим связь между случайным процессом $\xi(t)$ со спектральной плотностью

$$f_1(\omega) = \frac{|K(\omega)|^2}{|M(\omega)|^2 |Q_0(\omega) - b_0 e^{-i\omega}|^2} \quad (2)$$

и процессом $\rho(t)$ с рациональной спектральной плотностью (1), где все корни квазиполинома

$$G(\omega) = Q_0(\omega) - b_0 e^{-i\omega} \quad (3)$$

и все корни многочленов

$$Q_0(\omega) = \sum_{k=0}^n d_k \omega^k \quad (4)$$

и $K(\omega)$ расположены в верхней полуплоскости и различны, $K(\omega)$ и $M(\omega)$ многочлены степеней k_0 и m_0 соответственно, $k_0 \leq m_0 - 1$. Условие $k_0 \leq m_0 - 1$ означает существование среднеквадратических производных процесса $\xi(t)$ до n -го порядка включительно.

Поскольку знаменатель спектральной плотности (2) процесса представляет собой целую функцию экспоненциального типа, то согласно теореме Левинсона – Маккина – Питта [15], этот процесс является L – марковским при $K(\omega) \equiv 1$.

Пусть спектральные представления процессов $\xi(t)$ и $\rho(t)$ имеют вид:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_1(\omega) \quad (5)$$

и

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_0(\omega), \quad (6)$$

где $Z_0(\omega)$ и $Z_1(\omega)$ – случайные функции с некоррелированными приращениями.

Из формулы (2) и определений функций $Z_0(\omega)$ и $Z_1(\omega)$ следует соотношение:

$$dZ_0(\omega) = [Q_0(\omega) - b_0 e^{-i\omega}] dZ_1(\omega) \quad (7)$$

Подставляя в спектральное представление процесса $\rho(t)$ (6) равенство (7), получим:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} [Q_0(\omega) - b_0 e^{-i\omega}] dZ_1(\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \sum_{k=0}^n d_k \omega^k dZ_1(\omega) - b_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-1)} dZ_1(\omega). \end{aligned} \quad (8)$$

В силу формулы

$$\xi^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} \omega^k e^{i\omega t} dZ_1(\omega) \quad (9)$$

получаемой в результате дифференцирования спектрального представления (5) под знаком интеграла, видим, что первый интеграл в выражении (8) представляет собой линейную комбинацию производных процесса $\xi(t)$, а второй интеграл в (8) – это значение процесса $\xi(u)$ в точке $u = t - 1$ в силу формулы (6).

Таким образом, процесс $\rho(t)$ с рациональным спектром

(1) будет связан с процессом $\xi(t)$ с квазирациональной спектральной плотностью (2) с помощью следующего дифференциально – разностного неоднородного уравнения, получаемого из равенства (8):

$$\rho(t) = D_0 \xi(t) + D_1 \xi'(t) + D_2 \xi''(t) + \dots + D_n \xi^{(n)}(t) - b_0 \xi(t-1), \quad (10)$$

где $D_k = d_k / i^k, i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Решением уравнения (10) является процесс

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^n e^{\alpha_j t} \cdot \frac{1}{\Delta_j} \int_{-\infty}^t [\rho(u) + b_0 \xi(u-1)] \cdot e^{-\alpha_j u} du \quad (11)$$

где $1/\Delta_j = \prod_{j \neq s} (\alpha_s - \alpha_j)$, а $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, n$ – корни характеристического уравнения

$$D_0 + D_1 \alpha + D_2 \alpha^2 + D_3 \alpha^3 + \dots + D_n \alpha^n = 0.$$

Из формулы (11) следует рекуррентная зависимость между исследуемым процессом $\xi(t)$ и процессом $\rho(t)$ с рациональным спектром, с помощью которой можно прийти к прогнозу процесса $\xi(t)$.

Далее, учитывая, что $\rho(t)$ – процесс с рациональной спектральной плотностью (1), для которого известен следующий вид спектральной характеристики экстраполирования [9]:

$$\Phi_\tau(\omega) = C(\omega) / K(\omega), \quad (12)$$

где $C(\omega)$ – многочлен степени $m_0 - 1$ (m_0 – степень многочлена $M(\omega)$), можно свести задачу экстраполирования процесса $\xi(t)$ к соответствующей задаче для $\rho(t)$ и прийти к следующему представлению для спектральной характеристики экстраполирования процесса $\xi(t)$, учитывающему и форму (12), и формулу (11), и рекуррентную зависимость между $\xi(t + \tau)$ и $\xi(t)$:

$$\Phi_\tau(\omega) = \frac{N_\tau(\omega) [Q_0(\omega) - b_0 e^{-i\omega}] + \frac{b_0^{m+1} e^{i\omega(\tau-m-1)}}{Q_0^{m+1}(\omega)}}{K(\omega) Q_0^{m+1}(\omega)}, \quad (13)$$

где срок упреждения (прогноза) $\tau = m + \delta, 0 \leq \delta < 1$, а многочлен $N_\tau(\omega)$ имеет $[n(m+1) + m_0 - 1]$ -ю степень.

Покажем, что функция $\Phi_\tau(\omega)$, заданная формулой (13), в действительности является спектральной характеристикой экстраполирования процесса со спектральной плотностью (2). Для этого достаточно удовлетворить требованиям а) и б) метода А. Яглома.

Поскольку все корни многочленов $K(\omega)$ и $Q_0(\omega)$ расположены по условию только в верхней полуплоскости, то функция $\Phi_\tau(\omega)$ будет аналитична в нижней полуплоскости, т.е. условие а) будет выполнено. Пусть $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ – корни многочлена $Q_0(\omega)$, а a_1, a_2, \dots, a_s – корни многочлена $M(\omega)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ – кратности соответствующих корней $M(\omega)$, причем $\text{Im } a_j > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = m_0$. Тогда функция

$$\Psi_\tau(\omega) = [e^{i\omega\tau} - \Phi_\tau(\omega)] \cdot f_1(\omega) = \left[\frac{e^{i\omega\tau}}{Q_0^{m+1}(\omega)} \sum_{r=0}^m (b_0 e^{-i\omega})^r Q_0^{m-r}(\omega) - \frac{N_\tau(\omega)}{K(\omega) Q_0^{m+1}(\omega)} \right] \cdot \left[\frac{|K(\omega)|^2}{|M(\omega)|^2 \cdot |\bar{Q}_0(\omega) - \bar{b}_0 e^{i\omega}|} \right] \quad (14)$$

будет аналитична в верхней полуплоскости (условие б)), если $n(m+1) + m_0$ неизвестных коэффициентов многочлена $N_\tau(\omega)$ определяются из системы $n(m+1) + m_0$ линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{d^l}{d\omega^l} [N_\tau(\omega)]_{\omega=\beta_k} = \frac{d^l}{d\omega^l} \left[e^{i\omega\tau} K(\omega) \sum_{r=0}^m (b_0 e^{-i\omega})^r Q_0^{m-r}(\omega) \right]_{\omega=\beta_k};$$

$$\frac{d^l}{d\omega^l} [N_\tau(\omega)]_{\omega=\alpha_j} = \frac{d^l}{d\omega^l} \left[e^{i\omega\tau} K(\omega) \sum_{r=0}^m (b_0 e^{-i\omega})^r Q_0^{m-r}(\omega) \right]_{\omega=\alpha_j};$$

$$t = 0, 1, \dots, m; k = 1, \dots, n; l = 0, 1, \dots, \alpha_j - 1; j = 1, \dots, s. \quad (15)$$

Единственность решения этой системы следует из того факта, что детерминант системы отличен от нуля, поэтому многочлен $N_\tau(\omega)$, и, значит, спектральная характеристика экстраполирования определяются однозначно.

Нетрудно проверить, что и другие, не столь важные требования метода [10] тоже выполнены.

Используя вид спектральной характеристики (13), полученной для процесса со спектральной плотностью (2), по аналогии можно показать, что характеристика для процесса со спектральной плотностью

$$f(\omega) = \frac{|K(\omega)|^2}{|Q_0(\omega) - Q_1(\omega) e^{-i\omega g_1}|^2}, \quad (16)$$

где все корни квазиполинома $\tilde{G}(\omega) = Q_0(\omega) - Q_1(\omega) e^{-i\omega g_1}$ лежат в верхней полуплоскости, $g_1 = 1$, а степени многочленов $Q_0(\omega)$ и $Q_1(\omega)$ равны n и q_1 соответственно, задается в форме:

$$\Phi_\tau(\omega) = \frac{Q_1^{m+1}(\omega) e^{i\omega(\tau-m-1)}}{Q_0^{m+1}(\omega)} + \frac{P_\tau(\omega) [Q_0(\omega) - Q_1(\omega) e^{-i\omega}]}{K(\omega) Q_0^{m+1}(\omega)}. \quad (17)$$

В формуле (17) $P_\tau(\omega)$ – многочлен $[n(m+1) - 1]$ -й степени, неизвестные коэффициенты которого определяются из условий аналитичности функций $\Phi_\tau(\omega)$ и $\Psi_\tau(\omega)$ в нижней и, соответственно, верхней полуплоскостях. Эти условия приводят к системе $n(m+1)$ линейных уравнений, подобной системе (15).

Вопрос о квазиполиномах с корнями в верхней полуплоскости подробно рассмотрен в монографии Чеботарева – Меймана [16], послужившей основой для построения таких квазиполиномов, выполненного автором в работе [17].

III. РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Вышеприведенные формулы и выкладки проиллюстрируем на следующем примере спектральной

плотности:

$$f_2(\omega) = \frac{1}{|\omega - 2i - (\omega + 3i)e^{-i\omega}|^2}. \quad (18)$$

Данный процесс соответствует прохождению сигнала через неоднородную среду с двумя включениями, нарушающими однородность среды.

Сравнивая формулы (16) и (18) видим, что в формуле (16) $g_1 = 1$, $K(\omega) = 1$, $Q_0(\omega) = \omega - 2i$, $Q_1(\omega) = \omega + 3i$. Очевидно, что тогда степени будут равны $n = 1$, $g_1 = 1$, $k_0 = 0$. Примем срок упреждения $\tau < 1$ (например, $\tau = 0,85$), тогда число $m = 0$, т.к. $\tau = m + \delta$, $0 \leq \delta < 1$. Соответственно $\delta = \tau = 0,85$.

Подставляя $Q_0(\omega)$, $Q_1(\omega)$, $m = 0$ в формулу (17), получим:

$$\Phi_\tau(\omega) = \frac{(\omega + 3i)e^{i\omega(\tau-1)}}{\omega - 2i} + \frac{\alpha[\omega - 2i - (\omega + 3i)e^{-i\omega}]}{\omega - 2i}, \quad (19)$$

где $P_\tau(\omega) = \alpha -$ многочлен степени $n(m+1) - 1 = 0$.

Очевидно, что функция $\Phi_\tau(\omega)$ является аналитической в нижней полуплоскости, т.к. единственный корень её знаменателя $\omega = 2i \in H^+$.

Требование аналитичности функции

$$\Psi_\tau(\omega) = \frac{e^{i\omega\tau} - \alpha}{(\omega - 2i)[\omega + 2i - (\omega - 3i)e^{i\omega}]} \quad \text{в верхней}$$

полуплоскости H^+ (требование б)), очевидно, будет выполнено, если числитель функции $\Psi_\tau(\omega)$ обращается в нуль в единственном полюсе $\omega = 2i$ этой функции, лежащем в верхней полуплоскости, то есть $(e^{i\omega\tau} - \alpha)_{\omega=2i} = 0$. Отсюда получим:

$$\alpha = e^{-2\tau}. \quad (20)$$

Итак, спектральная характеристика L – марковского процесса $\xi(u)$ [5] примет следующий окончательный вид:

$$\Phi_\tau(\omega) = e^{i\omega(\tau-1)} + \frac{5ie^{i\omega(\tau-1)}}{\omega - 2i} + e^{-2\tau} - e^{-i\omega-2\tau} - \frac{5ie^{-i\omega-2\tau}}{\omega - 2i}. \quad (21)$$

Как известно [2], оптимальный линейный экстраполятор выражается через спектральную характеристику экстраполирования с помощью формулы:

$$\tilde{\xi}(t; \tau) = \tilde{\xi}(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \Phi_\tau(\omega) dZ_1(\omega), \quad (22)$$

где спектральное представление случайного процесса $\xi(t)$ имеет вид (5).

Подставляя формулу (21) в (22), получим:

$$\tilde{\xi}(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+\tau-1)} dZ_1(\omega) + 5i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t+\tau-1)}}{\omega - 2i} dZ_1(\omega) + e^{-2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_1(\omega) -$$

$$-5ie^{-2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-1)}}{\omega - 2i} dZ_1(\omega) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \quad (23)$$

Первый J_1 и третий J_3 интегралы в силу формулы (5) представляют собой значения процесса $\xi(u)$ в точках $u = t + \tau - 1$ и, соответственно, $u = t$, то есть $J_1 = \xi(t + \tau - 1)$, $J_3 = \xi(t)$. Вторым J_2 и четвертым J_4 интегралы преобразуем, используя соотношение:

$$1/(\omega - 2i) = \int_0^{\infty} ie^{-2s} e^{-i\omega s} ds. \quad (24)$$

Итак,

$$J_2 = 5i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t+\tau-1)}}{\omega - 2i} dZ_1(\omega) = 5i \int_0^{\infty} ie^{-2s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+\tau-1-s)} dZ_1(\omega).$$

Внутренний интеграл, распространенный на $(-\infty; \infty)$, представляет собой в силу формулы (5) значение процесса $\xi(u)$ в точке $u = t + \tau - 1 - s$, поэтому интеграл J_2 окончательно запишется в виде

$$J_2 = -5 \int_0^{\infty} e^{-2s} \cdot \xi(t + \tau - 1 - s) ds.$$

$$\text{Аналогично } J_4 = 5ie^{-2\tau} \cdot i \int_0^{\infty} e^{-2s} \cdot \xi(t - 1 - s) ds.$$

Подставляя J_2 и J_4 в формулу (23), получим окончательную формулу для оптимального линейного экстраполятора процесса $\xi(t)$ со спектральной плотностью (18):

$$\tilde{\xi}(t + \tau) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \xi(t + \tau - 1) + e^{-2\tau} \xi(t) - 5 \int_0^{\infty} e^{-2s} [\xi(t + \tau - 1 - s) - e^{-2\tau} \xi(t - 1 - s)] ds. \quad (25)$$

Таким образом, прогноз исследуемого L – марковского процесса зависит от его значений в двух точках $u = t$ и $u = t + \tau - 1$ так называемой L – границы по определению известного математика А. Розанова, впервые давшего определение L – марковским последовательностям [18]. В этом существенное отличие L – марковского процесса от марковского, прогноз которого зависит от значения процесса в единственный последний доступный исследователю момент времени.

Кроме L – границы в формулу оптимального экстраполятора входит интеграл от произведения экспоненциально убывающей функции $y = e^{-2s}$ и значений процесса.

С помощью программы, составленной на языке Python [19], аппроксимируем случайный процесс $\xi(u)$, стоящий под символом интеграла в формуле (25), тригонометрическим трендом с оптимальным числом гармоник, рассчитаем интеграл от произведения экспоненциальных и тригонометрических функций и придем к определению численных значений оператора экстраполирования $\tilde{\xi}(t + \tau)$ при заданном времени упреждения τ .

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рациональные спектральные плотности являются отличным инструментом для технической реализации синтезируемых устройств, а квазирациональные – это инструмент для адекватного моделирования реальных

физических процессов.

В настоящей работе получен прогноз L – марковского процесса в виде оптимального экстраполятора, который при заданной спектральной плотности (18) зависит от его значений только в двух точках, что предполагает быструю алгоритмическую обработку, а также техническую реализацию на основе программируемых логических интегральных схем (ПЛИС).

Применение разрабатываемых моделей и алгоритмов для процессов с квазирациональным спектром возможны в дробных фильтрах и системах с памятью, для описания стохастических процессов, в моделировании различного рода помех и дробно – степенных шумов, в задачах поглощения и отражения электромагнитных волн шероховатыми поверхностями и оценки комплексной диэлектрической проницаемости в диэлектриках СВЧ устройств.

видеосигналов // Электроника, фотоника и киберфизические системы. Т.4. №4 (2024): выпуск 14. С. 1-8.

- [18] Розанов Ю.А. Марковские случайные поля. М.: Наука, 1981. 256с.
- [19] Титов А.Н., Фадеева Л.Ю. Расчет числовых значений функционала – экстраполятора фрактального L -марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью // Инженерный вестник Дона. 2026. №3. <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2026/10794>.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Товстик Т.М. Фильтрация стационарных процессов с рациональной спектральной плотностью. // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2004, вып. 1 (№1). С. 55 – 60.
- [2] Тимашев С.Ф. Фликкер-шумовая спектроскопия: информация в хаотических сигналах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 248 с.
- [3] Ongaro F. Estimation of the effective properties of two-dimensional cellular materials: a review. *Theoretical & Applied Mechanics Letters* 8 (2018) pp.209-230.
- [4] Минько Д.В., Белявин К.Е., Шелег В.К. Теория и практика получения функционально-градиентных материалов импульсными электрофизическими методами. Минск: БНТУ, 2020. 450 с.
- [5] Пригарин С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей / Отв. ред. Г.А. Михайлов. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005. 259с.
- [6] Учайкин В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин – Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. 512 с.: ил.
- [7] Evdokimov Yu.K., Fadeeva L.Yu., Shakhurin D.V. Algorithm for synthesis of relief surface with given fractal dimension based on fractional dimension operators // *Russian Aeronautics*, 2025, Vol. 68, No. 2, pp. 442–448. <https://doi.org/10.3103/S1068799825020205>.
- [8] R. Lopes, N. Betrouni. Fractal and multifractal analysis: A review. *Medical Image Analysis* 13. 2009. pp. 634–649.
- [9] Wiener N., Masani H.P. The prediction theory of multivariate stochastic processes, I, *Acta Math.* 98, 111-150, 1957. II *Acta Math.* 99, 93-137. 1958.
- [10] Yaglom A.M. An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions/ Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York, 2004. 247p.
- [11] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Introductory Real Analysis* / Translated by R.A. Silverman. Prentice Hall. 2009. 403p.
- [12] Doob J.L. The elementary Gaussian processes. *Ann, Math Stat.* 15, № 3, 1944, pp. 229-282.
- [13] Фадеева Л. Ю. Построение стохастической модели линейного экстраполятора для L -марковского фрактального процесса // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. 2025. № 1 (65). С. 46–54. <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2025.1.46>; EDN: RXISUS.
- [14] Фадеева Л.Ю. Экстраполяция видеосигнала с квазирациональной спектральной плотностью // Инженерный вестник Дона. 2025. №5 (125). С. 893-900. <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2025/10082>
- [15] Молчан Г.М. L -марковские гауссовские поля // ДАН СССР, Т. 215, №5, 1974. С.1054-1057.
- [16] Чеботарёв Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций // Труды математического института им. В.А. Стеклова, Т.26. Изд-во АН СССР. М., Л. 1949. 331с.
- [17] Фадеева Л.Ю., Зиновьев К.Д. Особенности параметров спектральных плотностей L -марковских процессов и

A mathematical model of an extrapolator based on a stochastic equation that connects processes with a rational and quasi-rational spectrum

L.Yu. Fadeeva

Abstract — *The paper establishes a stochastic differential-difference equation that relates a random process with a rational spectral density to a process with a quasi-rational spectral density. The solution to this equation allows us to understand the mechanism of formation and structure of the spectral characteristics and optimal extrapolation of a process with a quasi-rational spectral density based on the known formulas for processes with a rational spectrum. It is shown that a process with a quasi-rational spectrum is an L-Markov process. It has been established that the forecast of an L-Markov process depends on the values of the process at several points, the so-called L-boundary. A method is described to determining the numerical values of optimal extrapolation operator by approximating the studied L-Markov process with a trigonometric polynomial with an optimal number of harmonics. The developed models and algorithms can be used in various radio engineering applications for processes with a quasi-rational spectrum.*

Key words — *mathematical modeling, extrapolator, quasi-rational spectral density, random process, L-Markov process, stochastic differential-difference equation.*

REFERENCES

- [1] Tovstik T.M. Filtering of stationary processes with rational spectral density. // Vestnik SPbGU. Ser. 1, 2004, issue 1 (No. 1), pp. 55-60.
- [2] Timashev, S.F. Flicker-Noise Spectroscopy: Information in Chaotic Signals. Moscow: FIZMATLIT, 2007. 248 p.
- [3] Ongaro F. Estimation of the effective properties of two-dimensional cellular materials: a review. Theoretical & Applied Mechanics Letters 8 (2018) pp.209-230.
- [4] Minko D.V., Belyavin K.E., Sheleg V.K. Theory and Practice of Obtaining Functionally Gradient Materials by Pulsed Electrophysical Methods. Minsk: BNTU, 2020. 450 p.
- [5] Pregarin S.M. Methods of Numerical Modeling of Random Processes and Fields / Ed. by G.A. Mikhailov. Novosibirsk: IVMiMG SB RAS, 2005. 259p.
- [6] Uchaykin, V. V. The Method of Fractional Derivatives / V. V. Uchaykin. Ulyanovsk: Artishok Publishing House, 2008. 512 p.: ill.
- [7] Evdokimov Yu.K., Fadeeva L.Yu., Shakhurin D.V. Algorithm for synthesis of relief surface with given fractal dimension based on fractional dimension operators // Russian Aeronautics, 2025, Vol. 68, No. 2, pp. 442-448. <https://doi.org/10.3103/S1068799825020205>.
- [8] R. Lopes, N. Betrouni. Fractal and multifractal analysis: A review. Medical Image Analysis 13. 2009. pp. 634-649.
- [9] Wiener N., Masani H.P. The prediction theory of multivariate stochastic processes, I, Acta Math. 98, 111-150, 1957. II Acta Math. 99, 93-137. 1958.
- [10] Yaglom A.M. An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions/ Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York, 2004. 247p.
- [11] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory Real Analysis / Translated by R.A. Silverman. Prentice Hall. 2009. 403p.
- [12] Doob J.L. The elementary Gaussian processes. Ann. Math Stat. 15, № 3, 1944, pp. 229-282.
- [13] Fadeeva L. Yu. Construction of a stochastic model of a linear extrapolator for the L-Markov fractal process // Bulletin of the Volga State Technological University. Ser.: Radio Engineering and Information and Communication Systems. 2025. No. 1 (65). pp. 46-54. <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2025.1.46>; EDN: RXISUS.
- [14] Fadeeva L.Yu. Extrapolation of a video signal with a quasi-rational spectral density // Engineering Bulletin of the Don. 2025. No. 5 (125). pp. 893-900. <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2025/10082>.
- [15] Molchan, G.M. L-Markov Gaussian Fields // DAN USSR, Vol. 215, No. 5, 1974, pp. 1054-1057.
- [16] Chebotaryov, N.G., and Meyman, N.N. The Routh-Hurwitz Problem for Polynomials and Entire Functions. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol. 26. Moscow and Leningrad: USSR Academy of Sciences, 1949. 331 p.
- [17] Fadeeva L.Yu., Zinoviev K.D. Features of the Spectral Density Parameters of L-Markov Processes and Video Signals // Electronics, Photonics, and Cyberphysical Systems. Vol. 4. No. 4 (2024): Issue 14. pp 1-8.
- [18] Rozanov Yu.A. Markov Random Fields. Moscow: Nauka, 1981. 256 p.
- [19] Titov A.N., Fadeeva L.Yu. Calculation of numerical values of the functional – extrapolator of the fractal L-Markov process with a quasi-rational spectral density // Engineering Bulletin of the Don. 2026. No. 3. <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2026/10794>.