Алгоритм идентификации оценок параметров двухфакторных неэлементарных линейных регрессий методом наименьших квадратов

М. П. Базилевский

***Аннотация*—Статья посвящена проблеме оценивания параметров двухфакторных неэлементарных линейных регрессий с помощью метода наименьших квадратов. Такие модели конструируются с использованием бинарной операции min. Ранее для оценки неэлементарных линейных регрессий был разработан алгоритм, позволяющий получить лишь «хорошее» решение, но не гарантирующий оптимальности суммы квадратов ошибок модели. В данной статье математически строго доказано, в какой области требуется искать оптимальное значение функции потерь. Разработан трёхшаговый алгоритм оценивания неэлементарных линейных регрессий. На его первом шаге определяются значения функции потерь в точках, в которых она не является дифференцируемой. На втором шаге точки упорядочиваются по возрастанию, после чего на каждом полученном промежутке ищется локальный минимум функции потерь. На третьем шаге выбирается глобальный минимум функции потерь. Разработанный алгоритм гарантирует оптимальность оценок параметров неэлементарных линейных регрессий по величине суммы квадратов ошибок. Проведены вычислительные эксперименты по двум случайно сгенерированным выборкам. В первом случае функция потерь имеет один локальный минимум, во втором – два. В обоих случаях новый алгоритм обеспечил глобальный минимум функции потерь, из-за чего качество аппроксимации двух построенных неэлементарных линейных регрессий оказалось выше, чем качество моделей при использовании известного алгоритма. Разработанный в статье алгоритм образует фундамент для построения более сложных структурных спецификаций регрессионных моделей.**

***Ключевые слова*—машинное обучение, регрессионный анализ, функция Леонтьева, неэлементарная линейная регрессия, метод наименьших квадратов.**

I. Введение

В настоящее время машинное обучение приобрело колоссальную актуальность, став ключевым драйвером цифровой трансформации, автоматизации и повышения эффективности принятия решений в условиях бурного роста объема данных. Несмотря на стремительное развитие сложных алгоритмов искусственного интеллекта, классический регрессионный анализ [1,2] сохраняет свою надежность и востребованность. В отличие от нейронных сетей, которые часто работают по принципу «черного ящика», регрессионные модели обеспечивают высокую прозрачность и интерпретируемость [3], позволяя исследователю четко понимать структуру связей между переменными и обосновывать полученные выводы. Современный регрессионный анализ преодолевает ограничение линейных регрессий, редко демонстрирующих высокое качество прогнозирования на сложных данных, за счёт построения нелинейных моделей. Так, например, в [4] для прогнозирования технического состояния первой ступени центробежного компрессора применены 5 моделей: экспоненциально-линейная и полиномиальная регрессия, ансамблевая модель Random Forest, вероятностная GPR и XGBRegressor. В [5] степенные, экспоненциальные и логарифмические регрессии были применены для прогнозирования качества воды в южном бассейне Каспийского моря, а в [6] построена нелинейная регрессия для прогнозирования производительности гибридной системы грунтового теплового насоса с градирней. В статье [7] рассмотрены нелинейные регрессии для прогнозирования динамики экономических, а также метеорологических процессов.

Важным инструментом экономического анализа являются производственные функции [8]. Производственная функция Леонтьева имеет вид

$$Q = \min\left\{a \cdot K, b \cdot L\right\}, \tag{1}$$

где Q – общий продукт; K, L – объемы капитала и труда; a, b – коэффициенты производства капитала и труда. Функция (1) отражает производственный процесс, в котором вводимые ресурсы требуются в фиксированных пропорциях [9]. При наличии статистических данных для переменных Q, K и L возникает задача оценивания параметров a и b нелинейной регрессии, специфицированной на основе функции (1). В монографии [10] нахождение точных оценок параметров такой нелинейной модели с любым количеством входных переменных с помощью метода наименьших модулей (МНМ) сведено к решению задачи частично целочисленного линейного программирования. В [11] рассмотрена модель, представляющая собой сумму регрессий с минимальным и максимальным вкладом

Статья получена 9 марта 2026 года.
Базилевский Михаил Павлович, Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Российская Федерация (e-mail: mik2178@yandex.ru).

независимых переменных, также оцениваемая с помощью МНМ.

МНМ [12,13], несмотря на свои преимущества в устойчивости к выбросам, проигрывает методу наименьших квадратов (МНК) по ряду причин. Например, МНК [14,15] эффективнее по сложности вычислений, а также имеет богатый набор хорошо изученных инструментов для проверки адекватности построенной модели (по коэффициенту детерминации R^2, t-критерию Стьюдента и т.д.). Поэтому в [16] был предложен метод нахождения приближенных МНК-оценок параметров специфицированных на основе функций Леонтьева двухфакторных моделей регрессии. В [17–19] этот метод был использован при параметризации более сложных форм регрессионных моделей. К сожалению, предложенный в [16] метод не гарантирует оптимальности оценок модели по величине суммы квадратов остатков. Данная статья посвящена решению этой проблемы.

II. Модель и алгоритм оценивания её неизвестных параметров

Специфицированная на основе функции Леонтьева двухфакторная регрессионная модель со свободным членом имеет вид

$$y_i = \alpha_0 + \min\{\alpha_1 x_{i1}, \alpha_2 x_{i2}\} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

где y_i, x_{i1}, x_{i2}, $i = \overline{1,n}$ – значения переменных y, x_1 и x_2; n – объем выборки; min – бинарная операция, возвращающая минимум двух чисел; ε_i, $i = \overline{1,n}$ – ошибки регрессии; α_0, α_1, α_2 – неизвестные параметры. Точные МНМ-оценки параметров модели (2) могут быть найдены в результате решения задачи частично целочисленного линейного программирования [10]. Для нахождения МНК-оценок параметров модели (2) требуется решить оптимизационную задачу

$$J_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha_0 - \min\{\alpha_1 x_{i1}, \alpha_2 x_{i2}\} \right)^2 \to \min. \qquad (3)$$

Пусть параметр α_1 положителен, т.е. справедливо ограничение

$$\alpha_1 > 0. \qquad (4)$$

Тогда модель (2) путём выноса коэффициента α_1 за знак бинарной операции min можно представить в виде

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \min\{x_{i1}, \lambda \cdot x_{i2}\} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (5)$$

где $\lambda = \alpha_2 / \alpha_1$. Для нахождения МНК-оценок параметров модели (5) требуется решить оптимизационную задачу

$$J_2(\alpha_0, \alpha_1, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha_0 - \alpha_1 \min\{x_{i1}, \lambda \cdot x_{i2}\} \right)^2 \to \min. \qquad (6)$$

Очевидно, что оптимальное решение задачи (6) при ограничении (4) равносильно решению задачи (3). Но если решать задачу (6) без учёта ограничения (4), то значение глобального минимума для функции потерь J_2 в точке оптимума может быть меньше, чем значение глобального минимума в точке оптимума для функции потерь J_1. Таким образом, модель (5) представляет собой более гибкий инструмент регрессионного моделирования, чем модель (2). В работах [17–19] регрессии типа (5) получили название «неэлементарные регрессионные модели».

Заметим, что фиксация параметра λ в модели (5) позволяет без труда вычислить оптимальные МНК-оценки параметров α_0 и α_1.

Пусть переменная x_2 имеет ненулевые значения одного знака. Тогда можно вычислить следующие характеристики:

$$\lambda_{\text{нижн}} = \min\left\{ \frac{x_{11}}{x_{12}}, \frac{x_{21}}{x_{22}}, \ldots, \frac{x_{n1}}{x_{n2}} \right\},$$

$$\lambda_{\text{верхн}} = \max\left\{ \frac{x_{11}}{x_{12}}, \frac{x_{21}}{x_{22}}, \ldots, \frac{x_{n1}}{x_{n2}} \right\}.$$

Рассмотрим модели парной линейной регрессии

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (7)$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_2 x_{i2} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (8)$$

Теорема. Если $x_{i2} > 0$, $i = \overline{1,n}$, то спецификация модели (5) при $\lambda \ge \lambda_{\text{верхн}}$ равносильная регрессии (7), а при $\lambda \le \lambda_{\text{нижн}}$ – регрессии (8). Если $x_{i2} < 0$, $i = \overline{1,n}$, то наоборот.

Доказательство. Пусть $x_{i2} > 0$, $i = \overline{1,n}$. Найдем такие значения параметра λ, для которых для любого i справедливы неравенства $x_{i1} \ge \lambda x_{i2}$, $i = \overline{1,n}$. Иными словами, требуется решить систему неравенств $\lambda \le \frac{x_{i1}}{x_{i2}}$, $i = \overline{1,n}$, относительно переменной λ. Решением этой системы является промежуток $\lambda \le \lambda_{\text{нижн}}$. На этом промежутке $\min\{x_{i1}, \lambda \cdot x_{i2}\} = \lambda x_{i2}$, поэтому модель (5) равносильна модели (8).

Аналогично найдем значения параметра λ, для которых справедливы неравенства $x_{i1} \le \lambda x_{i2}$, $i = \overline{1,n}$. Решением системы неравенств $\lambda \ge \frac{x_{i1}}{x_{i2}}$, $i = \overline{1,n}$, относительно переменной λ, является промежуток $\lambda \ge \lambda_{\text{верхн}}$. На этом промежутке $\min\{x_{i1}, \lambda \cdot x_{i2}\} = x_{i1}$, поэтому модель (5) равносильна модели (7).

Аналогично доказывается вторая часть теоремы при $x_{i2} < 0$, $i = \overline{1,n}$. *Теорема доказана*.

Из доказанной теоремы вытекает важное следствие – глобальный минимум функции J_2 в задаче (6) при $x_2 > 0$ ($x_2 < 0$) достигается на отрезке $\left[\lambda_{\text{нижн}}, \lambda_{\text{верхн}}\right]$. На основе этого факта в [16] был предложен следующий алгоритм нахождения приближенных МНК-оценок параметров модели (5).

Шаг 1. Равномерным образом разбить отрезок $\left[\lambda_{\text{нижн}}, \lambda_{\text{верхн}}\right]$ p точками.

Шаг 2. Используя каждую p-ю точку и концы отрезка $\left[\lambda_{\text{нижн}}, \lambda_{\text{верхн}}\right]$ в качестве параметра λ в модели (5), оценить с помощью МНК параметры ($p+2$)-х линейных регрессий.

Шаг 3. Выбрать наилучшую по величине суммы квадратов остатков модель.

Выделим недостатки предложенного в [16] алгоритма.

1. Не понятно, как выбирать количество точек *p* разбиения отрезка $\left[\lambda_{\text{нижн}}, \lambda_{\text{верхн}}\right]$.

2. С увеличением точек *p* растёт вычислительная сложность задачи.

3. При достаточно большом количестве точек *p* можно получить лишь «хорошее», но не оптимальное решение задачи (6).

Перейдем к описанию алгоритма, гарантирующего оптимальность решения задачи (6).

Рассмотрим функцию $f(\lambda) = \min\{x_1, \lambda \cdot x_2\}$. Очевидно, что эта функция не будет дифференцируемой только при $x_1 = \lambda \cdot x_2$. Например, на рис. 1 построен график функции $f(\lambda)$ при $x_1 = 6$, $x_2 = 2$.

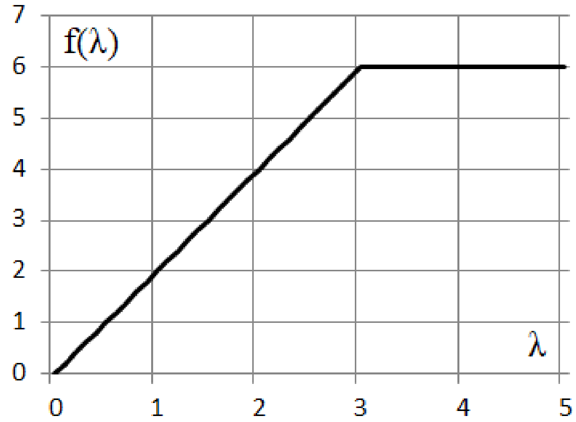

Рис. 1. График функции $f(\lambda) = \min\{6, 2\lambda\}$

По рис. 1 видно, что функция $f(\lambda) = \min\{6, 2\lambda\}$ не будет дифференцируемой только в точке $\lambda = 3$, в которой не существует касательной к графику функции.

Из этого следует, что функция J_2 в задаче (6) не будет дифференцируемой на отрезке $\left[\lambda_{\text{нижн}}, \lambda_{\text{верхн}}\right]$ только в точках

$$\lambda_i = \frac{x_{i1}}{x_{i2}}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Поскольку в точках (9) функция потерь (6) может иметь глобальный минимум, то необходимо каждую из этих точек проверять отдельно.

Будем считать, что все числа (9) различные. Тогда упорядочим эти числа по возрастанию, получив последовательность $\lambda_{(1)} < \lambda_{(2)} < \ldots < \lambda_{(n)}$.

Таким образом, на промежутках

$$\left(\lambda_{(i)}, \lambda_{(i+1)}\right), \qquad i = \overline{1, n-1}, \tag{10}$$

функция потерь J_2 в задаче (6) будет дифференцируемой и может иметь на каждом из них локальный минимум. К тому же, внутри каждого промежутка (10) не меняется состав «сработавших» в бинарной операции $\min\{x_{i1}, \lambda \cdot x_{i2}\}$ аргументов. Так, при $x_{i2} > 0$, $i = \overline{1,n}$, на промежутке $\left(\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}\right)$ первый аргумент x_{i1} «сработает» в одном наблюдении, а $\lambda \cdot x_{i2}$ – в (n-1)-м наблюдении; на промежутке $\left(\lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}\right)$ первый аргумент x_{i1} «сработает» в 2-х наблюдениях, а $\lambda \cdot x_{i2}$ – в (n-2)-х наблюдениях; …; на промежутке $\left(\lambda_{(n-1)}, \lambda_{(n)}\right)$ первый аргумент x_{i1} «сработает» в (n-1)-м наблюдении, а $\lambda \cdot x_{i2}$ – в одном наблюдении.

Введем переменную z_i, $i = \overline{1,n}$, по следующему правилу:

$$z_i = \begin{cases} x_{i1}, \text{ если } i \in N_1, \\ \lambda \cdot x_{i2}, \text{ если } i \in N_2, \end{cases}$$

где N_1 – множество номеров наблюдений, в которых на *k*-м промежутке $\left(\lambda_{(k)}, \lambda_{(k+1)}\right)$ сработал первый аргумент x_{i1}; N_2 – множество номеров наблюдений, в которых на *k*-м промежутке $\left(\lambda_{(k)}, \lambda_{(k+1)}\right)$ сработал второй аргумент $\lambda \cdot x_{i2}$. Очевидно, что для любого *k* справедливы соотношения $N_1 \cup N_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$, $N_1 \cap N_2 = \{\varnothing\}$.

Тогда на *k*-м промежутке из набора (10) задача (6) принимает вид

$$J_2(\alpha_0, \alpha_1, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha_0 - \alpha_1 z_i\right)^2 \to \min,$$

что равносильно оптимизационной задаче

$$J_2(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = \sum_{i \in N_1} \left(y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_{i1}\right)^2 + \\ + \sum_{i \in N_2} \left(y_i - \alpha_0 - \beta_1 x_{i2}\right)^2 \to \min, \tag{11}$$

где $\beta_1 = \alpha_1 \cdot \lambda$.

Оптимальные по критерию (11) МНК-оценки параметров α_0, α_1 и β_1 находятся в результате решения представленной в матричной форме системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} n & \sum\limits_{N_1} x_{i1} & \sum\limits_{N_2} x_{i2} \\ \sum\limits_{N_1} x_{i1} & \sum\limits_{N_1} x_{i1}^2 & 0 \\ \sum\limits_{N_2} x_{i2} & 0 & \sum\limits_{N_2} x_{i2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{N_1} x_{i1} y_i \\ \sum\limits_{N_2} x_{i2} y_i \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Решив систему (12), нужно определить оценку параметра $\lambda = \beta_1 / \alpha_1$. Если это значение попадает внутрь *k*-го промежутка $\left(\lambda_{(k)}, \lambda_{(k+1)}\right)$, то, значит, найден локальный минимум функции потерь (6).

Таким образом, сформулируем следующий алгоритм МНК-оценивания неэлементарной линейной регрессии (5).

Шаг 1. Используя точки (9) в качестве параметра λ в (5), оценить с помощью МНК параметры α_0 и α_1 соответствующих линейных регрессий. Для каждой полученной модели найти значение функции потерь (6).

Шаг 2. На каждом промежутке из набора (10) решить задачу (11), сводящуюся к решению системы линейных алгебраических уравнений (12), и найти оценки параметров $\lambda = \beta_1 / \alpha_1$. Если оценка параметра λ на *k*-м промежутке принадлежит ему, то построить в этой точке λ модель (5) и найти значение функции потерь (6).

Шаг 3. Выбрать из найденных на шаге 1 и 2 моделей регрессию с наименьшим значением функции потерь (6).

Разработанный алгоритм гарантирует нахождение глобального минимума функции потерь (6).

Заметим, что в зависимости от исходных статистических данных среди точек (9) могут встречаться одинаковые, вследствие чего количество промежутков (10) сократится.

III. Вычислительные эксперименты

Для демонстрации корректности разработанного математического аппарата были проведены вычислительные эксперименты. Сначала случайным образом были сгенерированы данные «data1», представленные в табл. 1.

Таблица 1. Данные «data1»

№	y	x_1	x_2
1	1417,7	139,8	33,9
2	1306,8	126,6	31,9
3	1220,1	125,6	22,9
4	1345,7	73,5	67,3
5	1372,3	84,3	56,4
6	1417,5	139,1	34,5
7	1010,9	88,9	25,4
8	1119,2	73,2	38,2
9	1366,2	140,7	29,0
10	1719,8	128,6	75,4

По этим данным с помощью МНК оценивались параметры линейной регрессии, а также неэлементарной линейной регрессии (5). Для сравнения модель (5) идентифицировалась с помощью разработанного в [16] алгоритма при p = 100 и с помощью нового алгоритма. В результате были построены следующие модели.

Модель линейной регрессии:

$$\tilde{y} = 346,054 + 5,270x_1 + 9,475x_2, \quad (13)$$

для которой сумма квадратов остатков RSS = 6292,35, а коэффициент детерминации R^2 = 0,9809.

Модель неэлементарной линейной регрессии (алгоритм из [16]):

$$\tilde{y} = 586,451 + 8,936\min\{x_1, 2,658x_2\}, \quad (14)$$

для которой RSS = 77053,96, R^2 = 0,7661.

Модель неэлементарной линейной регрессии (новый алгоритм):

$$\tilde{y} = 582,861 + 8,955\min\{x_1, 2,671x_2\}, \quad (15)$$

для которой RSS = 77025,35, R^2 = 0,7662.

График зависимости функции потерь (6) от величины параметра λ на промежутке $[\lambda_{\text{нижн}}, \lambda_{\text{верхн}}]$ для «data1» представлен на рис. 2. По графику видно, что функция потерь имеет один локальный минимум.

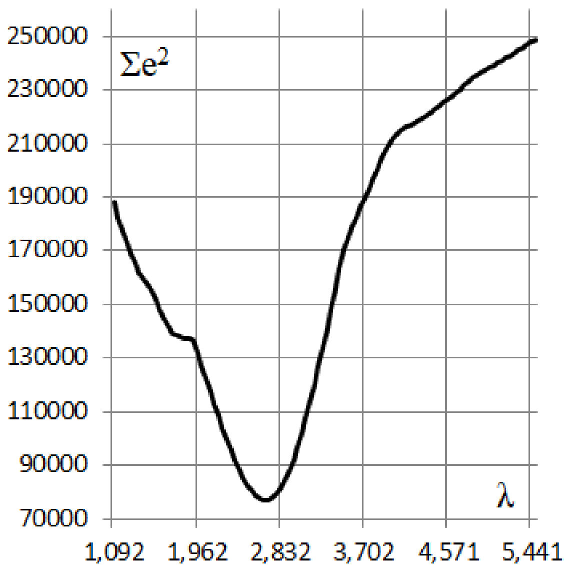

Рис. 2. Зависимость функции потерь от параметра λ по данным «data1»

По полученным результатам можно сделать следующие выводы.

1. Модель (15), построенная с помощью нового алгоритма, оказалась несколько лучше по качеству аппроксимации регрессии (14), идентифицированной с помощью алгоритма из [16].
2. При реализации нового алгоритма только внутри одного промежутка (1,916, 3,5) из набора (10) был обнаружен локальный минимум RSS = 77025,35 при λ = 2,671, что согласуется с графиком на рис. 2. Этот локальный минимум в итоге и оказался глобальным.
3. Модели (14) и (15) оказались существенно хуже по качеству аппроксимации простой линейной регрессии (13), что на первый взгляд ставит под сомнение целесообразность применения неэлементарных линейных регрессий (5) на практике.

Затем случайным образом были сгенерированы данные «data2», представленные в табл. 2.

Таблица 2. Данные «data2»

№	y	x_1	x_2
1	2011,9	70,2	38,1
2	2361,8	117,1	79,7
3	1973,2	78,4	63,7
4	2317	101,7	76,6
5	2099	92,7	66,5
6	2090,6	139,5	26,7
7	2375,8	144,7	86,8
8	2131,6	103,5	38,8
9	2473,3	144,5	63,6
10	2042,8	62,6	66,8

По этим данным были построены следующие модели.

Модель линейной регрессии:

$$\tilde{y} = 1498,15 + 4,044x_1 + 4,328x_2, \quad (16)$$

для которой RSS = 59810,15, R^2 = 0,7881.

Модель неэлементарной линейной регрессии (алгоритм из [16]):

$$\tilde{y} = 1623,879 + 5,648\min\{x_1, 3,102x_2\}, \quad (17)$$

для которой RSS = 46666,48, R^2 = 0,834711.

Модель неэлементарной линейной регрессии (новый алгоритм):

$$\tilde{y} = 1624,303 + 5,645 \min\left\{x_1, 3,094 x_2\right\}, \quad (18)$$

для которой RSS = 46665,06, R^2 = 0,834717.

График зависимости функции потерь (6) от величины параметра λ на промежутке $\left[\lambda_{\text{нижн}}, \lambda_{\text{верхн}}\right]$ для «data2» представлен на рис. 3. По графику видно, что функция потерь имеет два локальных минимума.

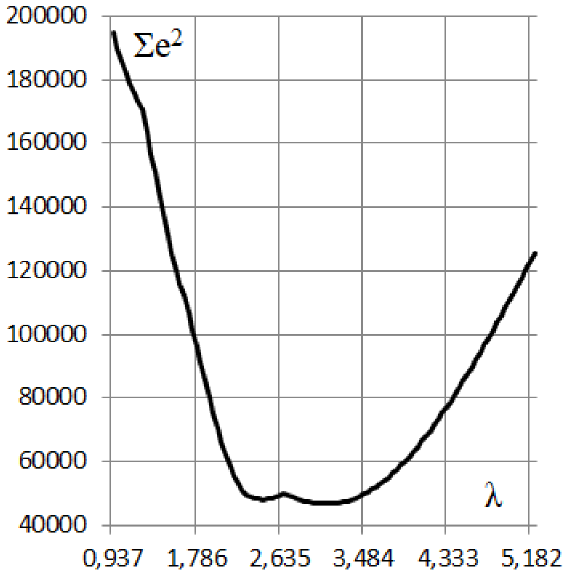

Рис. 3. Зависимость функции потерь от параметра λ по данным «data2»

По полученным результатам можно сделать следующие выводы.

1. Модель (18), построенная с помощью нового алгоритма, вновь оказалась несколько лучше по качеству аппроксимации регрессии (17), идентифицированной с помощью алгоритма из [16].

2. При реализации нового алгоритма сразу внутри двух промежутков были обнаружены локальные минимумы: на промежутке (2,272, 2,667) RSS = 48104,9 при λ = 2,474 и на промежутке (2,667, 5,225) RSS = 46665,06 при λ = 3,094. Это согласуется с графиком на рис. 3. Один из этих локальных минимумов в итоге оказался глобальным.

3. Модели (17) и (18) оказались лучше по качеству аппроксимации простой линейной регрессии (16).

IV. Заключение

В работе предложен алгоритм оценки неизвестных параметров неэлементарных линейных регрессий с помощью МНК. Разработанный алгоритм гарантирует нахождение глобального минимума функции потерь (6). Проведенные вычислительные эксперименты доказали корректность предложенного математического аппарата. Показано, что качество аппроксимации неэлементарных линейных регрессий может быть выше, чем качество традиционных линейных регрессий. Дальнейшие исследования автора будут связаны с разработкой специализированного программного обеспечения для построения более сложных неэлементарных линейных регрессий с любым количеством объясняющих переменных. Математическим фундаментом будущих исследований должен стать разработанный в данной статье алгоритм.

Библиография

[1] Arkes J. Regression analysis: A practical introduction. 3rd ed. UK: Routledge, 2026. 524 p.

[2] Chatterjee S., Hadi A.S. Regression analysis by example. 5th ed. New York: John Wiley & Sons, 2015. 393 p.

[3] Molnar C. Interpretable machine learning. Lulu. com, 2020.

[4] Гончаров Р.А., Таукеев Б.Б., Карташов С.В., Кожухов Ю.В. Прогнозная модель технического состояния при планировании периодичности технического обслуживания для центробежных компрессоров // Проблемы региональной энергетики. 2025. № 4 (68). С. 168-183.

[5] Masteali S.H., Bayat M., Bettinger P., Ghorbanpour M. Uncertainty analysis of linear and non-linear regression models in the modeling of water quality in the Caspian Sea basin: Application of Monte-Carlo method // Ecological Indicators. 2025. Vol. 170. P. 112979.

[6] Lan T., Hu R., Tang Q., Han M., Wu S., Liu G. A multivariate nonlinear regression prediction model for the performance of cooling tower assisted ground source heat pump system // Energy Conversion and Management. 2025. Vol. 325. P. 119333.

[7] Скляр А.Я. Модели и алгоритмы нелинейного регрессионного анализа временных рядов // Программные системы и вычислительные методы. 2025. № 3. С. 115-128.

[8] Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986. 239 с.

[9] Хлынин Э.В. Управление процессом воспроизводства основного капитала, направленное на увеличение объема производства продукции // Известия Тульского государственного университета. Экономические и юридические науки. 2020. № 1. С. 3-15.

[10] Носков С.И. Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. Иркутск: Облинформпечать, 1996. 320 с.

[11] Носков С.И., Хоняков А.А. Программный комплекс построения некоторых типов кусочно-линейных регрессий // Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами. 2019. № 3 (4). С. 47-55.

[12] Ning S., Liu Y. Estimation of unknown parameters in uncertainty distribution via the least absolute deviation principle and its application in uncertain statistics // Communications in Statistics-Simulation and Computation. 2026. P. 1-13.

[13] Goryainov A.V., Goryainova E.R. Comparison of efficiency of estimates by the methods of least absolute deviations and least squares in the autoregression model with random coefficient // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. No. 9. P. 1579-1588.

[14] Sadek A.M., Mohammed L.A. Evaluation of the performance of kernel non-parametric regression and ordinary least squares regression // JOIV: International Journal on Informatics Visualization. 2024. Vol. 8. No. 3. P. 1352-1360.

[15] Harefa A.O., Zega Y., Mendrofa R.N. The application of the least squares method to multicollinear data // International Journal of Mathematics and Statistics Studies. 2023. Vol. 11. No. 1. P. 30-39.

[16] Базилевский М.П. МНК-оценивание параметров специфицированных на основе функций Леонтьева двухфакторных моделей регрессии // Южно-Сибирский научный вестник. 2019. № 2 (26). С. 66-70.

[17] Базилевский М.П. Оценивание линейно-неэлементарных регрессионных моделей с помощью метода наименьших квадратов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2020. Т. 8. № 4 (31).

[18] Базилевский М.П. Отбор информативных операций при построении линейно-неэлементарных регрессионных моделей // International Journal of Open Information Technologies. 2021. Т. 9. № 5. С. 30-35.

[19] Базилевский М.П. Обобщение неэлементарных линейных регрессий // Моделирование и анализ данных. 2023. Т. 13. № 2. С. 85-98.

Базилевский Михаил Павлович, к.т.н., доцент кафедры математики Иркутского государственного университета путей сообщения, Иркутск, Россия; ORCID 0000-0002-3253-5697 (e-mail: mik2178@yandex.ru)

Algorithm for Identifying Estimates of Parameters in Two-Factor Non-Elementary Linear Regressions using Ordinary Least Squares

M. P. Bazilevskiy

***Abstract*—This article is devoted to the problem of estimating the parameters in two-factor non-elementary linear regressions using ordinary least squares. Such models are constructed using the binary min operation. Previously, to estimate non-elementary linear regression, an algorithm was developed that allowed us to obtain a «good» solution, but did not guarantee the optimality of the sum of the squared model errors. In this article, we mathematically prove in which area it is necessary to search for the optimal value of the loss function. A three-step algorithm for estimating non-elementary linear regressions has been developed. At its first step, the values of the loss function are determined at points where it is not differentiable. In the second step, the points are ordered in ascending order, after which a local minimum of the loss function is searched for in each resulting interval. In the third step, the global minimum of the loss function is selected. The developed algorithm guarantees optimal estimates of the parameters of non-elementary linear regressions based on the sum of squared errors. Computational experiments were conducted on two randomly generated samples. In the first case, the loss function has one local minimum, in the second – two. In both cases, the new algorithm provided a global minimum of the loss function, which is why the approximation quality of the two constructed non-elementary linear regressions turned out to be slightly higher than the quality of the models using the known algorithm. The algorithm developed in the article forms the foundation for constructing more complex structural specifications of regression models.**

***Keywords*—machine learning, regression analysis, Leontiev's function, non-elementary linear regression, ordinary least squares.**

REFERENCES

[1] Arkes J. Regression analysis: A practical introduction. 3rd ed. UK: Routledge, 2026. 524 p.
[2] Chatterjee S., Hadi A.S. Regression analysis by example. 5th ed. New York: John Wiley & Sons, 2015. 393 p.
[3] Molnar C. Interpretable machine learning. Lulu. com, 2020.
[4] Goncharov R.A., Taukeev B.B., Kartashov S.V., Kozhuhov YU.V. Prognoznaya model' tekhnicheskogo sostoyaniya pri planirovanii periodichnosti tekhnicheskogo obsluzhivaniya dlya centrobezhnyh kompressorov // Problemy regional'noj energetiki. 2025. No. 4 (68). P. 168-183.
[5] Masteali S.H., Bayat M., Bettinger P., Ghorbanpour M. Uncertainty analysis of linear and non-linear regression models in the modeling of water quality in the Caspian Sea basin: Application of Monte-Carlo method // Ecological Indicators. 2025. Vol. 170. P. 112979.
[6] Lan T., Hu R., Tang Q., Han M., Wu S., Liu G. A multivariate nonlinear regression prediction model for the performance of cooling tower assisted ground source heat pump system // Energy Conversion and Management. 2025. Vol. 325. P. 119333.
[7] Sklyar A.YA. Modeli i algoritmy nelinejnogo regressionnogo analiza vremennyh ryadov // Programmnye sistemy i vychislitel'nye metody. 2025. No. 3. P. 115-128.
[8] Klejner G.B. Proizvodstvennye funkcii: Teoriya, metody, primenenie. Moscow: Finansy i statistika, 1986. 239 p.
[9] Hlynin E.V. Upravlenie processom vosproizvodstva osnovnogo kapitala, napravlennoe na uvelichenie ob"ema proizvodstva produkcii // Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ekonomicheskie i yuridicheskie nauki. 2020. No. 1. P. 3-15.
[10] Noskov S.I. Tekhnologiya modelirovaniya ob"ektov s nestabil'nym funkcionirovaniem i neopredelennost'yu v dannyh. Irkutsk: Oblinformpechat', 1996. 320 p.
[11] Noskov S.I., Honyakov A.A. Programmnyj kompleks postroeniya nekotoryh tipov kusochno-linejnyh regressij // Informacionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnymi sistemami. 2019. No. 3 (4). P. 47-55.
[12] Ning S., Liu Y. Estimation of unknown parameters in uncertainty distribution via the least absolute deviation principle and its application in uncertain statistics // Communications in Statistics-Simulation and Computation. 2026. P. 1-13.
[13] Goryainov A.V., Goryainova E.R. Comparison of efficiency of estimates by the methods of least absolute deviations and least squares in the autoregression model with random coefficient // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. No. 9. P. 1579-1588.
[14] Sadek A.M., Mohammed L.A. Evaluation of the performance of kernel non-parametric regression and ordinary least squares regression // JOIV: International Journal on Informatics Visualization. 2024. Vol. 8. No. 3. P. 1352-1360.
[15] Harefa A.O., Zega Y., Mendrofa R.N. The application of the least squares method to multicollinear data // International Journal of Mathematics and Statistics Studies. 2023. Vol. 11. No. 1. P. 30-39.
[16] Bazilevskiy M.P. MNK-ocenivanie parametrov specificirovannyh na osnove funkcij Leont'eva dvuhfaktornyh modelej regressii // YUzhno-Sibirskij nauchnyj vestnik. 2019. No. 2 (26). P. 66-70.
[17] Bazilevskiy M.P. Ocenivanie linejno-neelementarnyh regressionnyh modelej s pomoshch'yu metoda naimen'shih kvadratov // Modelirovanie, optimizaciya i informacionnye tekhnologii. 2020. Vol. 8. No. 4 (31).
[18] Bazilevskiy M.P. Otbor informativnyh operacij pri postroenii linejno-neelementarnyh regressionnyh modelej // International Journal of Open Information Technologies. 2021. Vol. 9. No. 5. P. 30-35.
[19] Bazilevskiy M.P. Obobshchenie neelementarnyh linejnyh regressij // Modelirovanie i analiz dannyh. 2023. Vol. 13. No. 2. P. 85-98.

Bazilevskiy Mikhail Pavlovich, Ph.D., Associate Professor of the Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia; ORCID 0000-0002-3253-5697 (e-mail: mik2178@yandex.ru)